Conforme Abbildung

eines

von irregulären Hyperbeln n. Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis.

Der

Hohen philosophischen Fakultät (II. Section)

der Königlichen Ludwig-Maximilians-Universität München

als

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt am 1. Juli 1899

von

Ludwig Marc

aus München.

München 1899.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Conforme Abbildung

eines

von irregulären Hyperbeln n. Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis.

Der

Hohen philosophischen Fakultät (II. Section)

der Königlichen Ludwig-Maximilians-Universität München

als

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt am 1. Juli 1899

von

Ludwig Marc

aus München.

München 1899.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548318_0105

Einleitung.

Die Gleichungen einer Geraden und eines Kreises der tEbene sind dargestellt durch

$$at + a_1 t_1 + \beta = 0 \tag{1}$$

$$t t_1 + at + a_1 t_1 + \beta = 0. \tag{2}$$

Herr Christoffel[1]) und Herr H. A. Schwarz[2]) haben die Funktionen gegeben, welche die conforme Abbildung eines von Geraden und von Kreisbögen gebildeten Polygons auf den Einheitskreis vermitteln. Setzt man in (1) und (2) $t = \varphi(z)$ ein, so ist es, wenn $\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}$ eine eindeutige Funktion ist, möglich, die conforme Abbildung von Polygonen, welche von gewissen anderen Kurven begrenzt werden, auf den Einheitskreis zu leisten. Herr J. Göttler[3]) setzt in seiner Inauguraldissertation $\varphi(z) = z^n$ und $\varphi(z) = z^{\frac{1}{n}}$ und führt als speziellen Fall eines allgemeinen Ansatzes nach der von Herrn F. Lindemann[4]) gegebenen Methode die conforme Abbildung von Flächenstücken, deren Begrenzungskurven reguläre Hyperbeln mit gleichem Mittelpunkte und confocale Parabeln n. O., sowie gewisse cardioidische Kurven sind, auf den Einheitskreis durch.

In der folgenden Abhandlung werde

$$\varphi(z) = G_0 + G_1 z + G_2 z^2 + \ldots + G_n z^n$$

---

[1]) Annali di Matematica II[a] ser. tomo I[0] 1867.

[2]) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen.

[3]) J. Göttler, Inauguraldissertation, München 1897.

[4]) F. Lindemann, „Ueber die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird". Sitzungsbericht der k. b. Akademie der Wissenschaften, 1895, Bd. XXV, Heft II.

in (1) und (2) eingesetzt und die conforme Abbildung der Flächenstücke, welche von diesen Kurven begrenzt werden, auf die Halbebene untersucht. Die Kurven der z Ebene, in welche vermittels der Funktion

$$t = G_0 + G_1 z + G_2 z^2 + \ldots + G_n z^n$$

die Geraden und Kreise der t Ebene übergehen, mögen irreguläre Hyperbeln bezw. Lemniskaten n. O. heissen.[1])

Die folgende Abhandlung besteht aus drei Teilen:

1. Betrachtung der Hyperbelpolygone.
2. Bestimmung der abbildenden Funktionen.
3. Durchführung eines speziellen Beispiels.

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi}$ Punkt der z Ebene.
$Z = X + iY = Re^{i\Phi}$ Punkt der Halbebene.
$\zeta = \xi + i\eta = \varrho e^{i\psi}$ Punkt des Einheitskreises.

a und a_1, z und z_1 sind conjugierte Grössen. $\mathfrak{P}$ bezeichne ganz allgemein eine Potenzreihe, wobei zu beachten ist, dass derartige Funktionen, wenn man sie miteinander multipliziert, dividiert oder logarithmisch differentiert, wieder Potenzreihen geben.

Die ganze rationale Funktion wird verwendet in den Formen

$$t = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} G_\nu z^\nu \quad \text{und} \quad t = \prod_{\nu=1}^{\nu=n} (z - g_\nu)$$

Ist $\Phi(z\,Z)$ eine Funktion von z und Z mit den Constanten a, b, u. s. w., wo $z\,Z\,a\,b\,..$ complexe Grössen sind, und ersetzt man in Φ die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ durch $-i$, so sei das Resultat der Substitution durch $\Phi_1(z_1 Z_1)$ bezeichnet.

---

[1]) Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und Lucas, Journal de l'école polytechnique. Tome XXVIII. Paris 1879.

I. Teil.

Die irregulären Hyperbeln n. O. sind dargestellt durch

$$\alpha \sum_{\nu=0}^{\nu=n} G_\nu z^\nu + \alpha_1 \sum_{\nu=0}^{\nu=n} G_{1\nu} z_1^\nu + \beta = 0 \tag{3}$$

$$\alpha \prod_{\nu=1}^{\nu=n} (z - g_\nu) + \alpha_1 \prod_{\nu=1}^{\nu=n} (z_1 - g_{1\nu}) + \beta = 0 \tag{4}$$

Hyperbelpolygon sei im folgenden jedes Flächenstück genannt, welches von Bögen irregulärer Hyperbeln begrenzt wird. Wir unterscheiden im Hyperbelpolygon:

Ecken 1. Art, d. h. Polygonsecken, deren Scheitel weder im Punkte $z = \infty$ liegt, noch in einem Punkte $z = z_0$, wo z_0 einem Windungspunkte der t Ebene entspricht;

Ecken 2. Art, d. h. Polygonsecken, deren Scheitel Windungspunkten der t Ebene entsprechen;

Ecken 3. Art, d. h. Polygonsecken, deren Scheitel im Punkte $z = \infty$ liegen; die Winkel in den Ecken 3. Art sind gleich denen, welche die Asymptoten der die Ecken bildenden Hyperbeläste miteinander einschliessen.

Der Punkt $t = \infty$ ist Windungspunkt $n-1$. O., im Endlichen befinden sich im allgemeinen $n-1$ Windungspunkte 1. O., von denen unter Umständen einige zusammenfallen können, um im Windungspunkte entsprechend höherer Ordnung zu geben. Jeder dieser Punkte ist mit dem unendlich fernen durch je einen Verzweigungsschnitt zu verbinden, längs dessen je zwei Blätter ineinander übergehen. Der Winkel β_ϱ einer Ecke 2. Art geht in den Winkel $\mu_\varrho \beta_\varrho$ der t Ebene über, wenn $\mu_\varrho - 1$ die Ordnung des Windungspunktes ist, der Winkel 3. Art γ_ϱ geht über in den Winkel $n\gamma_\varrho$.

Einem Hyperbelpolygon der z Ebene entspricht ein geradliniges Polygon der t Ebene. Es sollen einige für das Folgende notwendige Winkelrelationen dieser geradlinigen Polygone aufgestellt werden.

Man kann die Winkelsumme eines Polygons bestimmen, indem man die einzelnen Winkel zu π ergänzt. Die Summe dieser Ergänzungen ist $\varkappa \cdot 2\pi$, wo $\varkappa$ von den im Polygon liegenden Windungspunkten abhängig ist. Man hat dabei wohl auf die Zählrichtung zu achten. Fig. 1.

Für die Winkelsumme eines m Ecks der t Ebene, welches nur Ecken 1. Art. mit den Winkeln $\pi\alpha_\mu$ und keinen Verzweigungspunkt im Innern hat, gilt

$$\Sigma\alpha_\mu = m - 2 \tag{5}$$

Bei Ecken 3. Art hat man zu beachten, dass die in ihnen gelegenen Winkel negativ gezählt werden, wie Fig. 2 zeigt. Man erhält

$$\Sigma\alpha_\mu - n\Sigma\gamma_\varrho = m + r - 2 \tag{6}$$

Schliesst ein Hyperbelpolygon einen oder mehrere Verzweigungspunkte ein, so wird das geradlinige Polygon der t Ebene in verschiedenen Windungsflächen verlaufen. Ein solches Hyperbelpolygon liegt nur dann vollständig im Endlichen, wenn die Ebenen, die in den eingeschlossenen Windungspunkten zusammenhängen, gleichzeitig untereinander in Verbindung stehen; andernfalls muss durch den unendlich fernen n fachen Windungspunkt der Uebergang ermöglicht werden d. h. es muss die nötige Anzahl Ecken 3. Art vorhanden sein. Fig. 3a und 3b zeigt im schematischen Aufriss und Grundriss den Verlauf eines im Endlichen gelegenen Polygons, welches Windungspunkte 1., 4., 2., 1. Ordnung einschliesst.[1]) Man sieht, dass um einen Windungspunkt n. O. im Ganzen n Umgänge stattfinden. Zu dem, bei der einfachen Windungsfläche stattfindenden, einmaligen Umgang kommen also noch $\Sigma\delta_\sigma - s$ Umkreisungen hinzu, so dass man im ganzen $\Sigma\delta_\sigma - s + 1$ Umgänge hat, wenn $\delta_\sigma - 1$ die Ordnung und s die Zahl der Windungspunkte ist.

Es besteht die Winkelrelation

$$\Sigma\alpha_\mu = m - 2(\Sigma\delta_\sigma - s) - 2 \tag{7}$$

Treten hiezu noch Ecken zweiter Art, so kommt

$$\Sigma\alpha_\mu + \Sigma\varepsilon_\lambda\beta_\lambda = (m + l) - 2(\Sigma\delta_\sigma - s) - 2 \tag{8}$$

wo $\varepsilon_\lambda - 1$ die Ordnung und l die Anzahl der Ecken 2. Art ist.

---

[1]) Erläuterung zu Fig. 3 und 4. In den mit ● bezeichneten Punkten kommt der Linienzug von rückwärts nach vorne, verläuft dann längs der stark gezogenen Linie vor dem Verzweigungspunkt und geht bei Punkt ⊙ von vorne nach rückwärts; die arabischen Ziffern geben die Zahl der Umläufe, die römischen Ziffern die Windungsebene an.

Fig. 4 gibt den zweiten Fall. Er erledigt sich leicht analog dem vorausgehenden und man hat allgemein

$$\Sigma \alpha_\mu - \Sigma n \gamma_\varrho = (m + r) - 2(\Sigma \delta_\varrho - s) - 2 \qquad (9)$$

wenn γ_ϱ die Winkel 3. Art und r die Anzahl der Ecken ist.

Ausserdem ergeben sich noch folgende Relationen:

Aus

$$\Sigma \alpha_\mu - \Sigma n \gamma_\varrho = m + r - 2 \qquad (10)$$

kommt

$$\Sigma \alpha_\mu + \Sigma \varepsilon_\lambda \beta_\lambda - \Sigma n \gamma_\varrho = m + l + r - 2(\Sigma \delta_\sigma - s) - 2 \qquad (11)$$

Kommt das Aeussere eines im Endlichen gelegenen Polygons in Betracht, so hat man hauptsächlich zwei Fälle zu unterscheiden.

Es liege kein Grundpunkt im Innern der abzubildenden Fläche, ausser dem unendlich fernen. Man hat also ein Polygon, welches nur einen $n-1$ fachen Grundpunkt im Innern hat und erhält so

$$\Sigma \alpha_\mu = m + 2(n-1) + 2 \qquad (12)$$

wenn man berücksichtigt, dass jetzt die Ergänzungen in entgegengesetzter Richtung zu zählen sind. Ebenso ergibt sich

$$\Sigma \alpha_\mu + \Sigma \varepsilon_\lambda \beta_\lambda = m + l + 2(n-1) + 2 \qquad (13)$$

Es liegen s Grundpunkte auf dem abzubildenden Flächenstück, dann werden von dem geschlossenen Polygonzug $(n-1) - (\Sigma \delta_\sigma - s)$ Verzweigungsschnitte überschritten. Man hat somit

$$\Sigma \alpha_\mu = m + 2 + 2\{(n-1) - (\Sigma \delta_\sigma - s)\} \qquad (14)$$

ferner

$$\Sigma \alpha_\mu + \Sigma \varepsilon_\lambda \beta_\lambda = m + l + 2 + 2\{(n-1) - (\Sigma \delta_\sigma - s)\} \qquad (15)$$

Man hätte übrigens die Formeln 13 bis 15 auch aus den Formeln, die im vorausgehenden analog sind, entwickeln können.

II. Teil.

Nach dem von Herrn F. Lindemann gegebenem Prinzip suchen wir nun die abbildende Funktion und präzisieren diese Aufgabe in folgender Weise:

Wir gehen aus von der Gleichung der Begrenzungskurven des Flächenstückes in der z Ebene und bilden eine Funktion Φ von z und Z, welche der Bedingung genügt

$$\Phi(z\,Z) = \Phi_1(z_1\,Z_1) \tag{16}$$

und zwar nur dann, wenn gleichzeitig

$$\varphi(z\,z_1) = 0 \quad \text{und} \quad Z - Z_1 = 0$$

erfüllt ist. In Worten heisst dies: Setzt man in Φ aufeinander folgende Werte von z ein, welche auf der Kurve $\varphi(z\,z_1) = 0$ liegen, so wandert Z auf der reellen Coordinatenaxe oder der Rand der von φ begrenzten Fläche geht vermittels der Funktion Φ auf die reelle Coordinatenaxe über.

Indem wir nun diese Funktion Φ zu Grunde legen, gelangen wir durch Verfolgung des Zieles, eine für alle Punkte des abzubildenden Flächenstückes holomorphe Funktion zu finden, zu einer Funktion $F(z\,Z)$, welche das Flächenstück eindeutig und conform auf die Halbebene und damit auf den Einheitskreis abbildet.

Es soll nun F für die im I. Teile gegebenen Polygone bestimmt werden.

Einteilung.

A. Inneres von Hyperbelpolygonen
   a) Ecken erster Art,
   b) Ecken erster und zweiter Art,
   c) Ecken erster, zweiter und dritter Art.

B. Aeusseres von Hyperbelpolygonen
   a) Ecken erster Art,
   b) Ecken erster und zweiter Art.

C. Lemniscatenpolygone
   a) $z = \infty$ im Innern,
   b) $z = \infty$ als Ecke.

A.

a.

Zufolge der Kurvengleichung

$$\varphi(z z_1) = \alpha \sum_{\nu=0}^{\nu=n} G_\nu z^\nu + \alpha_1 \sum_{\nu=0}^{\nu=n} G_{1\nu} z_1^\nu + \beta = 0$$

ist

$$\varphi'(z z_1) = \alpha \cdot \frac{dz}{dZ} \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu \cdot G_\nu z^{\nu-1} + \alpha_1 \frac{dz_1}{dZ} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu \cdot G_{1\nu} z_1^{\nu-1} = 0 \quad (17)$$

Um die Constanten α und α_1 zu beseitigen, ziehen wir das Vorzeichen in die Constante, differentieren logarithmisch und erhalten

$$\frac{d}{dZ} \log\left(z' \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu\, G_\nu z^{\nu-1}\right) = \frac{d}{dZ} \cdot \log\left(z_1' \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu\, G_{1\nu} \cdot z_1^{\nu-1}\right) \quad (18)$$

Die Funktion

$$\Phi = \frac{d}{dZ} \cdot \log\left(z' \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu\, G_\nu z^{\nu-1}\right) \quad (19)$$

genügt dann den in (16) gestellten Anforderungen, überträgt also den Rand des gegebenen Flächenstückes auf die X-Axe und vermittelt, wenn in ihrer Abhängigkeit von Z richtig bestimmt, die gewünschte Abbildung. Φ braucht nicht holomorph zu sein. Es müssen nur die einzelnen Unstetigkeitsstellen von Φ durch passende Ausdrücke in der Variablen Z aufgehoben werden können. Dies soll im folgenden geschehen.

Jene Unstetigkeiten der Funktion Φ, welche auf dem Rande durch diejenigen Ecken hervorgerufen werden, die nicht in einer durch die Beschaffenheit der Funktion $\varphi(z)$ bestimmten Unstetigkeitsstellen liegen, lassen sich sofort heben. Wir betrachten die tEbene und wenden den Schwarz'schen Satz an.

Das Hyperbelpolygon der zEbene habe die Eckpunkte erster Art $z = a_\mu$, die zugehörigen Ecken seien $t = b_\mu$ und $Z = A_\mu$.

Mittels des von Herrn Schwarz gegebenen Satzes gehen die von Geraden gebildeten Winkel $\alpha_\mu \pi$ der tEbene und, weil tEbene und zEbene in isogonaler Verwandtschaft stehen, auch die Winkel $\alpha_\mu \pi$ der zEbene in die Winkel π der ZEbene über durch folgende Funktion

$$t - b_\mu = (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu} \cdot \mathfrak{P}(Z - A_\mu) \quad (20)$$

Man bildet dann Φ und erhält

$$t' = \alpha_\mu \cdot (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot \mathfrak{P}$$

$$\Phi = \frac{d}{dZ} \log t' = \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} + \mathfrak{P}$$

Setzt man nun

$$F \quad \Phi - \sum_1^m \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} = \frac{d}{dZ} \log z' \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu\, G_\nu z^{\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} = \mathfrak{P} \quad (21)$$

so ist F eine in den Ecken α_μ eindeutige, stetige und endliche Funktion. Es möge dabei A_μ nicht dem unendlich fernen Punkt $Z = A_\mu = \infty$ entsprechen. Die Funktion F soll nun im Innern des Hyperbelpolygon geprüft werden. Es sei $g_\nu \# g_\lambda$.

Einem beliebigen Punkte im Innern $z = c$ entspreche der Punkt $Z = C$. In der Umgebung dieses Punktes gilt dann die Entwicklung:

$$\begin{aligned} z - c &= (Z - C) \cdot \mathfrak{P} \\ z &= c + (Z - C)\mathfrak{P} = \mathfrak{P} \\ t &= \mathfrak{P} \\ t' &= \mathfrak{P} \\ \Phi &= \mathfrak{P} \end{aligned}$$

und somit ist Φ und F für einen gewöhnlichen Punkt im Innern holomorph. Die Entwicklung für einen Punkt $z = g_\nu$ im Innern gibt

$$\begin{aligned} z - g_\nu &= (Z - \Gamma_\nu) \cdot \mathfrak{P} \\ z - g_\varkappa &= (g_\nu - g_\varkappa) + (Z - \Gamma_\nu)\mathfrak{P} = \mathfrak{P} \\ t &= (Z - \Gamma_\nu) \cdot \mathfrak{P} \\ t' &= \mathfrak{P} \\ \Phi &= \mathfrak{P} \end{aligned}$$

und Φ ist also auch in diesem Falle holomorph für endliche Werte von Z.

Es sei g_σ mehrfacher Grundpunkt von der Ordnung $\delta_\sigma - 1$. Die Funktion t hat dann an der betreffenden Stelle die Form

$$t - t_\sigma = \prod_{\sigma=1}^{\sigma=s} (z - g_\sigma)^{\delta_\sigma}$$

Der g_σ entsprechende Punkt sei $Z = B_\sigma$, wo B_σ eine complexe Zahl ist. Dann gilt die Entwicklung:

$$
\begin{aligned}
z - g_\sigma &= (Z - B_\sigma) \cdot \mathfrak{P} \\
(z - g_\sigma)^{\delta_\sigma} &= (Z - B_\sigma)^{\delta_\sigma} \cdot \mathfrak{P} \\
z - g_\varkappa &= (g_\sigma - g_\varkappa) + (Z - B_\sigma) \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{P} \\
t - t_\sigma &= (Z - B_\sigma)^{\delta_\sigma} \cdot \mathfrak{P} \\
t' &= \delta_\sigma (Z - B_\sigma)^{\delta_\sigma - 1} \cdot \mathfrak{P} \\
\frac{d \log t'}{dZ} &= \frac{\delta_\sigma - 1}{Z - B_\sigma} + \mathfrak{P}
\end{aligned}
$$

Da B_σ eine complexe Zahl ist, so ist $\Phi - \dfrac{\delta_\sigma - 1}{Z - B_\sigma}$ nicht reell; fügt man aber $- \dfrac{\delta_\sigma - 1}{Z - B_{1\sigma}}$ hinzu, so erhält man den reellen Ausdruck

$$\Phi - \frac{\delta_\sigma - 1}{Z - B_\sigma} - \frac{\delta_\sigma - 1}{Z - B_{1\sigma}}$$

Wenn dann s die Zahl der in Betracht kommenden Punkte ist und nur Ecken erster Art vorhanden sind, erhält man

$$H = \frac{d}{dZ} \log t' - \sum_{\mu=0}^{m} \frac{a_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \sum_{\sigma=0}^{s} \left(\frac{\delta_\sigma - 1}{Z - B_\sigma} + \frac{\delta_\sigma - 1}{Z - B_{1\sigma}} \right) \qquad (22)$$

Untersucht man diese Funktion analog (21) für $z = c$ und $z = g_\nu$, so ist auch hiefür H holomorph. Es handelt sich jetzt noch um unendlich grosse Werte von Z. Dem Werte $Z = \infty$ entspreche der Wert $z = k$. Wir erhalten dann folgende Darstellung:

$$
\begin{aligned}
z &= k + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \dots \\
\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu \, G_\nu z^{\nu-1} &= b_0 + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2} + \dots \\
z' &= - \frac{a_1}{Z^2} - \frac{2 a_2}{Z^3} - \dots \\
z' \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu \cdot G_\nu z^{\nu-1} &= \frac{d_0}{Z^2} + \frac{d_1}{Z^3} + \dots \\
\frac{d}{dZ} \log z' \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \nu \, G_\nu z^{\nu-1} &= \frac{c_0}{Z} + \frac{c_1}{Z^2} + \dots
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{array}{lll}
\Phi = 0 & F = 0 & H = 0 \\
Z = \infty & Z = \infty & Z = \infty
\end{array}
\qquad (23)
$$

F und H sind somit Funktionen, welche für keinen Wert der Variablen, auch nicht für $Z = \infty$, unendlich werden, folglich sind sie constant und zwar nach (23) gleich Null.

Man hat somit für ein Hyperbelpolygon, das m Ecken erster Art besitzt und mit Punkten $z = c$, $z = 0$, $z = g_\nu$ im Innern, die abbildende Funktion

$$\begin{aligned} \frac{d}{dZ} \log t' &= \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} \\ \log t' &= \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \log (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} + \log C \\ t' &= C \cdot \prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \end{aligned} \tag{24}$$

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \, dZ + C'$$

Ebenso erhält man aus H für ein Polygon, das mehrfache Grundpunkte im Innern hat

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n =$$

$$C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \cdot \prod_{\sigma=1}^{\sigma=s} [(Z - B_\sigma)^{\delta_\sigma - 1} (Z - B_{1\sigma})^{\delta_\sigma - 1}] \, dZ + C' \tag{25}$$

Es lässt sich durch Substitution von $Z = \frac{1}{u}$ zeigen, dass in (24) und (25) die Eindeutigkeit durch den Punkt $Z = \infty$ nicht gestört wird. Denn (24) geht über in

$$C \cdot \int_0^u \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (1 - A_\mu u)^{\alpha_\mu - 1} \, du}{u^{\Sigma \alpha_\mu - m + 2}}$$

und (25) in

$$C \cdot \int_0^u \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (1 - A_\mu u)^{\alpha_\mu - 1} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=s} [(1 - B_\sigma u)^{\delta_\sigma - 1} (1 - B_{1\sigma} u)^{\delta_\sigma - 1}] \, du}{u^{\Sigma \alpha_\mu - m + 2 \Sigma \delta_\sigma - 2s + 2}} \tag{26}$$

Nun ist aber nach (5) und (7) der Exponent der Nenner in beiden Ausdrücken gleich Null.

b.

Treten mehrfache Grundpunkte als Ecken auf, so hat man Ecken 2. Art. Um die daselbst gebildeten Winkel in solche von 180 Grad zu verwandeln, benützen wir den Schwarz'schen Satz. Sei der Eckpunkt von der Ordnung $\varepsilon_\lambda - 1$, so geht der Winkel β_λ der z Ebene in den Winkel $\varepsilon_\lambda \beta_\lambda$ der t Ebene über. Es kommt dann

$$t - b'_\lambda = (Z - B'_\lambda)^{\varepsilon_\lambda \beta_\lambda} \cdot \mathfrak{P}$$

$$\frac{d \log t'}{dZ} = \frac{\varepsilon_\lambda \beta_\lambda - 1}{(Z - B'_\lambda)} + \mathfrak{P}$$

$$F \equiv \frac{d}{dZ} \log t' - \sum_1^l \frac{\beta_\lambda \varepsilon_\lambda - 1}{Z - B'_\lambda} = \mathfrak{P}$$

Geht man nun analog dem Vorausgehenden weiter und verbindet diese Betrachtung mit den früheren Resultaten, so hat man für ein Hyperbelpolygon mit m Ecken erster Art und l Ecken zweiter Art, mit s mehrfachen Grundpunkten im Innern die abbildende Funktion:

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n$$

$$= C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} (Z - B_\lambda)^{\varepsilon_\lambda \beta_\lambda - 1} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=s} [(Z - B_\sigma)^{\delta_\sigma - 1} \quad (27)$$

$$\cdot (Z - B_{1\sigma})^{\delta_\sigma - 1}] \, dZ + C'$$

Die Substitution $Z = \frac{1}{u}$ zeigt mit Hilfe der Relation (8), dass die Integralfunktion für $u = 0$ d. h. $Z = \infty$ einen endlichen Wert besitzt.

c.

Treten Ecken dritter Art auf, so ist zu beachten, dass die t Ebene n blätterig ist. Im Punkte $t = \infty$, welcher dem Punkte $z = \infty$ entspricht, hängen die n Blätter der t Ebene zusammen, wie aus

$$\lim_{t = \infty} t = G_n z^n$$

hervorgeht. Der Winkel $\gamma_\varrho \pi$ der z Ebene geht also über in den Winkel $n \cdot \gamma_\varrho \cdot \pi$ der t Ebene. Wenn nun die entsprechenden Punkte

$$z = \infty \quad t = \infty \quad Z = \Gamma_\varrho, \text{ wo } \Gamma_\varrho \neq \infty \text{ sei,}$$

sind, so hat man die Entwicklung

$$t = (Z - \Gamma_\varrho)^{-n\gamma_\varrho} \cdot \mathfrak{P}$$

$$t' = -n\gamma_\varrho (Z - \Gamma_\varrho)^{-n\gamma_\varrho - 1} \cdot \mathfrak{P}$$

$$\frac{d}{dZ} \log t' = -(n\gamma_\varrho + 1)(Z - \Gamma_\varrho)^{-1} + \mathfrak{P}$$

$$\Phi = \frac{-(n\gamma_\varrho + 1)}{Z - \Gamma_\varrho} + \mathfrak{P}$$

Alles Uebrige bleibt wie im Vorausgehenden, auch $\mathfrak{P}$ ist offenbar wieder gleich Null und man erhält für ein Polygon mit m Ecken erster Art und ν Ecken dritter Art die abbildende Funktion:

$$\frac{d}{dZ} \log t' = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \frac{n\gamma_\varrho + 1}{Z - \Gamma_\varrho}$$

$$\log t' = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (\alpha_\mu - 1) \log(Z - A_\mu) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (n\gamma_\varrho + 1) \log(Z - \Gamma_\varrho) + \log C$$

$$t' = C \cdot \prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} : \prod_{\varrho=1}^{\varrho=r} (Z - \Gamma_\varrho)^{n\gamma_\varrho + 1} \qquad (28)$$

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} dZ}{\prod_{\varrho=1}^{\varrho=r} (Z - \Gamma_\varrho)^{n\gamma_\varrho + 1}} + C'$$

Untersucht man noch die Funktion für $Z = \infty$, so kommt für $Z = \frac{1}{u}$

$$\int_0^u \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (1 - A_\mu u)^{\alpha_\mu - 1} du}{\prod_{\varrho=1}^{\varrho=r} (1 - \Gamma_\varrho u)^{n\gamma_\varrho + 1} u^{\Sigma\alpha_\mu - n\Sigma\gamma_\varrho - m - r + 2}}$$

und nach (10) ist die Bedingung der Holomorphität erfüllt. Der Punkt $z = \Gamma_\varkappa$ ist nicht beliebig für den Fall, dass $n\gamma_\varrho + 1 = k$, wo k eine ganze Zahl ist. Entwickelt man (28) mittels partieller Integration, wobei man zur Abkürzung setzt

$$M = \left[\frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} (Z - \Gamma_\varkappa)^k}{\prod_{\varrho=1}^{\varrho=r} (Z - \Gamma_\varrho)^{n\gamma_\varrho + 1}} \right] Z = \Gamma_\varkappa$$

$$f_1 = \left[\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} - \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{n\gamma_\varrho + 1}{(Z - \Gamma_\varrho)} + \frac{k}{Z - \Gamma_\varkappa} \right] Z = \Gamma_\varkappa$$

$$f_2 = f_1^2 = \left[\frac{\partial f_1}{\partial Z} \right] Z = \Gamma_\varkappa$$

$$f_\mu = f_1 \cdot f_{\mu-1} + \left[\frac{\partial f_{\mu-1}}{\partial Z} \right] Z = \Gamma_\varkappa$$

so erhält man

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n$$

$$= -\frac{C \cdot M}{(k-1)(Z-\Gamma_\varkappa)^{k-1}} - \frac{C \cdot M \cdot f_1}{(k-1)(k-2)(Z-\Gamma_\varkappa)^{k-2}} - \cdots - \frac{C \cdot M \cdot f_{\varkappa-2}}{k-1!(Z-\Gamma_\varkappa)} \quad (29)$$

$$- \frac{C \cdot M}{(k-1)!} \cdot f_{\varkappa-1} \cdot \log (Z - \Gamma_\varkappa) + \mathfrak{P}(Z - \Gamma_\varkappa)$$

Die Punkte $\Gamma_\varkappa$ der reellen Axe der Halbebene, welche dem ∞ fernen Punkte des gegebenen Polygons entsprechen, sind an gewisse Bedingungen gebunden,[1]) von denen man einige durch die Gleichung $f_{\varkappa-1} = 0$ angeben kann. Denn nur dann fällt der Ausdruck $\log (Z - \Gamma_\varkappa)$ weg, welcher die Eindeutigkeit für $z = \infty$ stören würde.

Ohne Schwierigkeit ergibt sich jetzt die abbildende Funktion, wenn m Ecken erster, l Ecken zweiter, $\varkappa$ Ecken dritter Art und s mehrfache Punkte im Innern vorhanden sind.

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n$$

$$= C \cdot \int_0^z \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} (Z - B_\lambda)^{\varepsilon_\lambda \beta_\lambda - 1} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=s} (Z - B_\sigma)^{\delta_\sigma - 1} (Z - B_{1\sigma})^{\delta_\sigma - 1} dZ + C'}{\prod_{\varrho=1}^{\varrho=r} (Z - \Gamma_\varrho)^{n\gamma_\varrho + 1}} \quad (30)$$

Die Relation (11) zeigt wieder die Eindeutigkeit für $Z = \infty$. Ebenso ist der Punkt $Z = \Gamma_\varrho$ analogen Bedingungen unterworfen, wie in (28).

---

[1]) Gesammelte math. Abhandlungen von H. A. Schwarz, 2. Band, p. 76.

B.

a.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, dass sich der unendlich ferne Punkt der zEbene im Innern des Polygons befindet, d. h. dass es sich um die Abbildung des Aeussern eines endlichen Polygons auf die Halbebene handelt. Dem Punkte $z = \infty$ entspreche der Punkt $Z = \Gamma'$, wo Γ' eine complexe Zahl ist. Man hat dann die Entwicklung

$$z = (Z \quad \Gamma')^{-1} \cdot \mathfrak{P}$$

$$z^{\nu} = (Z - \Gamma')^{-\nu} \cdot \mathfrak{P}$$

$$t = (Z - \Gamma')^{-n} \cdot \mathfrak{P}$$

$$t' = (Z - \Gamma')^{-n-1} \cdot \mathfrak{P}$$

$$\frac{d}{dZ} \log t' = -(n+1)(Z - \Gamma')^{-1} + \mathfrak{P}$$

Aus den gleichen Gründen wie (22) fügen wir die Grösse von $-(n+1)(Z-\Gamma_1')^{-1}$ hinzu. Die Funktion ist dann holomorph und hat den Wert Null, was sich durch die gleichen Betrachtungen wie früher ergibt. Es kommt schliesslich, falls im Gebiete der abzubildenden Fläche keine mehrfachen Grundpunkte, ausser $z = \infty$, liegen:

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n = C \cdot \int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} dZ}{\{(Z-\Gamma') \cdot (Z-\Gamma_1')\}^{n+1}} + C' \qquad (31)$$

Setzt man $Z = \frac{1}{u}$, so geht (31) über in

$$\int_0^u \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (1 - A_\mu u)^{\alpha_\mu - 1} du}{\{(1-\Gamma' u)(1-\Gamma_1' u)\}^{n+1} u^{\Sigma \alpha_\mu - m - 2(n+1)+2}} \qquad (32)$$

Die Eindeutigkeit im Punkte $Z = \infty$ ist also nicht gestört. Da $n + 1 = l$ eine ganze Zahl ist, so wiederholt sich hier die Entwicklung (29).

$$\frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m}(Z-A_\mu)^{\alpha_\mu-1}}{(Z-\Gamma_1')^l} = u \qquad \frac{dZ}{(Z-\Gamma_\varrho)^l} = dv$$

$$\int u\cdot dv = u\cdot k_0\cdot\frac{1}{(Z-\Gamma_\varrho)^l} - k_1 u'\cdot\frac{1}{(Z-\Gamma_\varrho)^{l-1}} + \dots$$

$$+ (-1)^m\cdot k_m\cdot u^{(m)}\cdot\frac{1}{(Z-\Gamma_\varrho)^{n-m}} \pm \dots$$

$$+ (-1)^{l-1} k_{l-1}\int u^{(l-1)}\cdot\frac{dZ}{Z-\Gamma_\varrho}$$

Aus der Gleichung $u^{(l-1)} = 0$ ergeben sich dann Werte für Γ_ϱ, welche die Funktion in der Eindeutigkeit nicht stören.

Ohne Weiteres ergeben sich dann die Funktionen

$$G_0 + G_1 z + \dots + G_n z^n$$

$$= C\cdot\int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m}(Z-A_\mu)^{\alpha_\mu-1}\prod_{\sigma=1}^{\sigma=s}[(Z-B_\sigma)^{\delta_\sigma-1}(Z-B_{1\sigma})^{\delta_\sigma-1}]dZ}{\{(Z-\Gamma')(Z-\Gamma_1')\}^{n+1}} + C' \qquad (33)$$

für Ecken erster Art und mehrfache Grundpunkte im Innern. Die Holomorphität im Punkte $Z=\infty$ wird durch Formel (14), die Bedingungsgleichung für Γ' durch die Entwicklung (32) gegeben.

b.

Endlich ergibt sich für Polygone mit m Ecken erster Art, l Ecken zweiter Art, s mehrfachen Grundpunkten und dem Punkte $z=\infty$ in der abzubildenden Fläche das Integral

$$G_0 + G_1 z + \dots + G_n z^n \qquad (34)$$

$$= C\cdot\int_0^Z \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m}(Z-A_\mu)^{\alpha_\mu-1}\prod_{\sigma=1}^{\sigma=s}(Z-B_\sigma)^{\delta_\sigma-1}(Z-B_{1\sigma})^{\delta_\sigma-1}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=l}(Z-B_\lambda)^{r_\lambda\beta_\lambda-1}dZ}{\{(Z-\Gamma')(Z-\Gamma_1')\}^{n+1}} + C'$$

Die Diskussion dieser Formel ist schon in Früherem enthalten und kann deshalb hier übergangen werden.

Denkt man sich die $n$fach zusammenhängende tEbene auf die Riemann'sche Kugelfläche projiziert, so bildet offenbar bezüglich der Verzweigung der Punkt $t=\infty$ im Vergleich mit den anderen mehr-

fachen Windungspunkten keine Abnormität. Es ändert sich nur die Zählrichtung der Winkel, deren Scheitel $t = \infty$ ist. Es zeigen dies auch die entsprechenden Formeln im Vorausgehenden.

Die Formeln (30) und (34) enthalten die übrigen, einzeln abgeleiteten Resultate als spezielle Fälle in sich.

Diese beiden Formeln mögen auf den Einheitskreis conform übertragen werden. Es geschieht dies bekanntlich durch die Formel

$$Z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

Man erhält dann

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n$$

$$= C \cdot \int_0^{\zeta} \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (\zeta - \mathfrak{A}_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} (\zeta - \mathfrak{B}_\lambda)^{\varepsilon_\lambda \beta_\lambda - 1} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=s} [(\zeta - \mathfrak{B}_\sigma)(\zeta - \mathfrak{B}_{1\sigma})]^{\delta_\sigma - 1} d\zeta}{\prod_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\zeta - \mathfrak{C}_\varrho)^{n\gamma_\varrho + 1} (1-\zeta)^{\Sigma a_\mu + \Sigma \varepsilon_\lambda \beta_\lambda + 2(\Sigma \delta_\sigma - s) - \Sigma n\gamma_\varrho - m - l - r + 2}}$$

Nach (11) ist der Exponent von $(1-\zeta)$ gleich Null, so dass sich ergibt

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n$$

$$= C \cdot \int_0^{\zeta} \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (\zeta - \mathfrak{A}_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} (\zeta - \mathfrak{B}_\lambda)^{\varepsilon_\lambda \beta_\lambda - 1} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=s} [(\zeta - \mathfrak{B}_\sigma)(\zeta - \mathfrak{B}_{1\sigma})]^{\delta_\sigma - 1} d\zeta}{\prod_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\zeta - \mathfrak{C}_\varrho)^{n\gamma_\varrho + 1}} + C'$$

Da die Punkte $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\lambda$, $\mathfrak{C}_\varrho$ auf dem Einheitskreis liegen, so kann man schliesslich auch schreiben:

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n$$

$$= C \cdot \int_0^{\zeta} \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (\zeta - e^{i\psi_\mu})^{\alpha_\mu - 1} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} (\zeta - e^{i\eta_\lambda})^{\varepsilon_\lambda \beta_\lambda - 1} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=s} [(\zeta - \varrho_\sigma e^{i\chi_\sigma})(\zeta - \varrho_\sigma e^{-i\chi_\sigma})]^{\delta_\sigma - 1} d\zeta}{\prod_{\varrho=1}^{\varrho=r} (\zeta - e^{i\omega_\varrho})^{n\gamma_\varrho + 1}} \tag{35}$$

In analoger Weise wird (34) transformirt in

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n \tag{36}$$

$$= C \cdot \int_0^{\zeta} \frac{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} (\zeta - e^{i\psi_\mu})^{\alpha_\mu - 1} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} (\zeta - e^{i\eta_\lambda})^{\varepsilon_\lambda \beta_\lambda - 1} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=s} [(\zeta - \varrho_\sigma e^{i\chi_\sigma})(\zeta - \varrho_\sigma e^{-i\chi_\sigma})]^{\delta_\sigma - 1} d\zeta}{\{(\zeta - \varrho' e^{i\omega})(\zeta - \varrho' e^{-i\omega})\}^{n+1}} + C'$$

Als untere Grenze des Integrals haben wir $\zeta = 0$ gesetzt, obwohl sie gemäss der Transformationsformel $Z = i\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ heissen sollte $\zeta = 1$. Die dadurch erhaltene Veränderung hat nur auf die Constante Einfluss. Setzt man in (30) und (34), bezw. (35) und (36) $G_\nu = 0$, wo $\nu = 1,\ 2 \ldots n-1$, ferner $G_n = 1$, berücksichtigt ferner die daraus entspringenden Aenderungen bezüglich der Grundpunkte, so erhält man die von Herrn J. Göttler a. a. O. aufgestellten Formeln.

C.

Nach den im Vorausgehenden angestellten Untersuchungen bietet es nun keine Schwierigkeit, die Differentialgleichungen für Polygone mit den Begrenzungscurven

$$tt_1 + \alpha t + \alpha_1 t_1 + \beta = 0$$

aufzustellen. Die Funktion, welche den in (16) gestellten Forderungen genügt, ergibt sich auf folgende Weise:

$$(t+\alpha_1)\,t_1' + (t_1+\alpha)\,t' = 0$$

wenn $\frac{dt}{dZ} = t'$ gesetzt wird.

$$\frac{t'}{t+\alpha_1} = -\frac{t_1'}{t_1+\alpha} \qquad \text{I.}$$

$$\frac{d\log t'}{dZ} - \frac{t'}{t+\alpha_1} = \frac{d\log t_1'}{dZ} - \frac{t_1'}{t_1+\alpha} \qquad \text{II.}$$

$$\frac{d^2\log t'}{dZ^2} - \frac{t''}{t+\alpha_1} + \frac{t'^2}{(t+\alpha_1)^2} = \frac{d^2\log t_1'}{dZ^2} + \frac{t_1'^2}{(t_1+\alpha)^2} - \frac{t_1''}{t_1+\alpha} \qquad \text{III.}$$

$$\left(\frac{d\log t'}{dZ}\right)^2 + \left(\frac{t}{t+\alpha_1}\right)^2 - 2\,\frac{t''}{t+\alpha_1} = \left(\frac{d\log t_1'}{dZ}\right) + \left(\frac{t_1'}{t_1+\alpha}\right)^2 - 2\,\frac{t_1''}{t_1+\alpha} \qquad \text{IV.}$$

III. $-\frac{1}{2}$ IV. gibt mit Beachtung von I.

$$\frac{d^2\log t'}{dZ^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\log t'}{dZ}\right)^2 = \frac{d^2\log t_1'}{dZ^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\log t_1'}{dZ}\right)^2 = \{tZ\} \qquad (37)$$

Dies ist die „Schwarz'sche Funktion".[1])

[1]) Vergl. H. A. Schwarz die Nachträge, ferner die Abhandlung von H. Schottky, Crelle Journal, Bd. 83.

Im vorliegenden Falle ist

$$t = f(z)$$

$$t' = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial Z} = f'(z) \cdot z'$$

Die Gleichung (37) geht dann über in

$$\{tZ\} = \{zZ\} + \frac{1}{2}\left[2 \cdot \frac{f'''}{f'} - 3\frac{f''^2}{f'^2}\right] \cdot z'^2 \text{ [1)]}$$

Je nach der Beschaffenheit von $f(z)$ ergeben sich bedeutende Vereinfachungen.

Der in $\{tZ\}$ auftretende Ausdruck $\frac{d \log t'}{dZ}$ wurde schon im Vorausgehenden aufgestellt und erörtert, so dass die dort gefundenen Resultate ohne Weiteres hier benützt werden können.

Für die Ecken erster Art mit dem Winkel α_μ hat sich ergeben (20),

$$\frac{d \log t'}{dZ} = \frac{\alpha_\mu - 1}{Z - A_\mu} + \mathfrak{P}$$

Man erhält daraus

$$\frac{d^2 \log t'}{dZ^2} = -\frac{\alpha_\mu - 1}{(Z - A_\mu)^2} + \mathfrak{P}$$

$$\{tZ\} = +\frac{1}{2}\left[\frac{1 - \alpha_\mu^2}{(Z - A_\mu)^2}\right] + \frac{\alpha_\mu}{(Z - A_\mu)} + \mathfrak{P}$$

Man erhält für ein Kreisbogenpolygon mit m Ecken erster Art, l Ecken zweiter und r Ecken dritter Art, mit s mehrfachen Punkten im Innern die abbildende Funktionalgleichung:

$$\{zZ\} + \frac{1}{2}\left[2\frac{f'''}{f'} - 3\frac{f''^2}{f'^2}\right] z'^2$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha_\mu^2}{(Z - A_\mu)^2} + \frac{\alpha_\mu}{(Z - A_\mu)} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\varepsilon_\lambda \beta_\lambda)^2}{(Z - B_\lambda)^2} + \frac{b_\lambda}{(Z - B_\lambda)}$$

$$+ \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - n^2 \gamma_\varrho^2}{(Z - \Gamma_\varrho)^2} + \frac{g_\varrho}{Z - \Gamma_\varrho} + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \frac{1}{2} \cdot (1 - \delta_\sigma^2)\left[\frac{1}{(Z - B_\sigma)^2} + \frac{1}{(Z - B_{1\sigma})^2}\right]$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \frac{d_\sigma}{Z - B_\sigma} + \frac{d_{1\sigma}}{Z - B_{1\sigma}} \qquad (38)$$

[1)] Vergl. die allgemeine Formel von Schottky und Cayley.

Wenn die Gleichung für $Z = \infty$ endlich bleiben soll, so müssen für die Constanten der rechten Gleichungsseite Bedingungsgleichungen bestehen, die sich durch die Transformation $Z = \frac{1}{t}$ ergeben. Die Glieder, welche t^3, t^2, t im Nenner enthalten, müssen wegfallen. Es ergibt sich dann:

$$\Sigma \tfrac{1}{2}(1-\alpha_\mu{}^2) + \Sigma \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon_\lambda{}^2\beta_\lambda{}^2) + \Sigma \tfrac{1}{2}(1-n^2\gamma_\varrho{}^2) + \Sigma(1-\delta_\sigma{}^2)$$
$$+ \Sigma a_\mu A_\mu + \Sigma b_\lambda B_\lambda + \Sigma g_\varrho \Gamma_\varrho + \Sigma(d_\sigma B_\sigma + d_{1\sigma}\cdot B_{1\sigma}) = 0$$
$$\Sigma A_\mu(1-\alpha_\mu{}^2) + \Sigma B_\lambda(1-\varepsilon_\lambda{}^2\beta_\lambda{}^2) + \Sigma\Gamma_\varrho(1-n^2\gamma_\varrho{}^2) + \Sigma(B_\sigma + B_{1\sigma})(1-\delta_\sigma{}^2)$$
$$+ \Sigma a_\mu A_\mu{}^2 + \Sigma b_\lambda B_\lambda{}^2 + \Sigma g_\varrho \Gamma_\varrho{}^2 + \Sigma(d_\sigma B_\sigma{}^2 + d_{1\sigma} B_{1\sigma}{}^2) = 0$$
$$\Sigma a_\mu + \Sigma b_\lambda + \Sigma g_\varrho + \Sigma(d_\sigma + d_{1\sigma}) = 0$$

Für Polygone mit m Ecken erster, l Ecken zweiter Art, s mehrfachen Grundpunkten und mit dem Punkte $z = \infty$ auf der abzubildenden Fläche erhält man die Differentialgleichung:

$$\{zZ\} + \frac{1}{2}\left[2\frac{f'''}{f'} - 3\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right] z'^2$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{1}{2}\frac{1-\alpha_\mu{}^2}{(Z-A_\mu)^2} + \frac{a_\mu}{(Z-A_\mu)} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} \frac{1}{2}\frac{1-\varepsilon_\lambda{}^2\beta_\lambda{}^2}{(Z-B_\lambda)^2} + \frac{b_\lambda}{Z-B_\lambda}$$

$$+ \frac{1}{2}(1-n^2)\left(\frac{1}{(Z-\Gamma')^2} + \frac{1}{(Z-\Gamma_1')^2}\right) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \frac{1}{2}(1-\delta_\sigma{}^2)\left(\frac{1}{(Z-B_\sigma)^2} + \frac{1}{(Z-B_{1\sigma})^2}\right)$$

$$+ \left(\frac{c}{Z-\Gamma'} + \frac{c_1}{Z-\Gamma_1'}\right) + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} \frac{d}{Z-B_\sigma} + \frac{d_1}{Z-B_{1\sigma}} \qquad (39)$$

Die zwischen den Constanten bestehenden Relationen lauten:

$$\Sigma \tfrac{1}{2}(1-\alpha_\mu{}^2) + \Sigma \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon_\lambda{}^1\beta_\lambda{}^2) + (1-n^2) + \Sigma(1-\delta_\sigma{}^2) + \Sigma a_\mu A_\mu$$
$$+ \Sigma b_\lambda B_\lambda + (c\Gamma' + c_1\Gamma_1') + \Sigma(d_\sigma B_\sigma + d_{1\sigma} B_{1\sigma}) = 0$$
$$\Sigma A_\mu(1-\alpha_\mu{}^2) + \Sigma B_\lambda(1-\varepsilon_\lambda{}^2\beta_\lambda{}^2) + \Sigma(B_\sigma + B_{1\sigma})(1-\delta_\sigma{}^2)$$
$$+ (\Gamma' + \Gamma_1')(1-n^2) + \Sigma a_\mu A_\mu{}^2 + \Sigma b_\lambda B_\lambda{}^2 + \Sigma(d_\sigma B_\sigma{}^2 + d_{1\sigma} B_{1\sigma}{}^2)$$
$$+ c\Gamma'^2 + c_1\Gamma_1'^2 = 0$$
$$\Sigma a_\mu + \Sigma b_\lambda + \Sigma(d_\sigma + d_{1\sigma}) + c + c_1 = 0$$

Aus (38) und (39) gehen die übrigen Fälle durch Spezialisierung hervor.

Für den Fall, dass das Kreisbogenpolygon der tEbene, aus zwei Ecken erster Art und eine Ecke dritter Art besteht, ferner keinen Windungspunkt im Innern enthält, wird die Differentialgleichung dritter Ordnung gelöst durch den Quotienten zweier linear unabhängigen Partikularlösungen der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

III. Teil.

Es sollen einige spezielle Fälle betrachtet werden.

Hat man ein Polygon mit vier rechtwinkligen Ecken und keinen Grundpunkt im Innern, ordnet man ferner den 4 Ecken 1. Art die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 so zu, dass die Beziehung $(A_1, A_2, A_3, A_4) = -1$ erfüllt ist, so kann man als entsprechende Punkte des Einheitskreises

$$\zeta = +1,\ -1,\ +i,\ -i$$

wählen. Man erhält dann

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n = C \cdot \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A_1)(Z-A_2)(Z-A_3)(Z-A_4)}} + C'$$

$$= C \cdot \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} + C'$$

$$\zeta = \sin am\left(\frac{G' + G_1 z + \ldots + G_n z^n}{C}\right) \tag{40}$$

Unter bestimmten Umständen bildet die obige Gleichung auch Polygone ab, in denen Ecken zweiter Art auftreten. Ist nämlich die Ecke zweiter Art ein Grundpunkt von der Ordnung $\varepsilon_\lambda - 1$ und ist der dort auftretende Winkel $\beta_\lambda \pi = \frac{1}{\varepsilon_\lambda}\pi$, so fallen in der einschlägigen Formel

$$G_0 + G_1 z + G_2 z^2 + \ldots + G_n z^n$$
$$= C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} (Z - B_\lambda)^{\varepsilon_\lambda \beta_\lambda - 1}\, dZ + C'$$

die Glieder, welche durch die Ecken zweiter Art eingeführt werden heraus und die Gleichung (40) vermittelt die Abbildung.

Um das Innere des von einem der n Aeste einer irregulären Hyperbel n. O. eingeschlossenen Polygons abzubilden, setzt man in (28)

$$m = 0 \qquad r = 1 \qquad \gamma_\varrho = \frac{1}{n}$$

und erhält

$$t = C \cdot \int_0^z \frac{dZ}{(Z - \Gamma)^2}$$

$$t = \frac{aZ + b}{Z - \Gamma}$$

Nimmt man einen Hyperbelast, welcher durch einen Grundpunkt von der Ordnung $\varepsilon_\lambda - 1$ geht, so hat man in (30) zu setzen:

$$m = 0 \qquad s = 0 \qquad \beta_\lambda = \frac{1}{\varepsilon_\lambda} \qquad \gamma_\varrho = \frac{\varepsilon_\lambda}{n}$$

Es ergibt sich dann

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n = C \cdot \int_0^z \frac{dZ}{(Z - \Gamma_\varrho)^{\varepsilon_\lambda + 1}}$$

oder

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n = \frac{C + C_1 Z + C_2 Z^2 + \ldots + C_\lambda Z^{\varepsilon_\lambda}}{(Z - \Gamma_\varrho)^{\varepsilon_\lambda}}$$

Für den Punkt Γ_ϱ bestehen dabei Bedingungsgleichungen gemäss (29).

Bildet man ein Hyperbelpolygon mit zwei Ecken dritter Art ab, wobei die beiden Winkel gleich Null seien, dann hat man in Formel (28)

$$m = 0; \ \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

zu setzen und erhält

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n = C \cdot \int_0^z \frac{dZ}{(Z - \Gamma_1)(Z - \Gamma_2)} + C'$$

Die Punkte der z Ebene und der ζ Ebene seien beim Uebergang zum Einheitskreis derart zugeordnet, dass sich entsprechen mögen

$z = 0$	$+1$	$+i\infty$	-1	$-i\infty$
$\zeta = 0$	$+1$	$+i$	-1	$-i$

Es ergibt sich dann bei Beachtung des im allgemeinen Falle auf Seite 15 Erwähnten

$$G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n = C \cdot \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} + C'$$

und ersetzen wir schliesslich die allgemeine Funktion $G_0 + G_1 z + \ldots + G_n z^n$ durch eine spezielle, nämlich $z^3 - 3z$, so wird

$$C = -\frac{8}{\pi} \qquad \text{und} \qquad C' = 0$$

und das Resultat lautet

$$z^3 - 3z = \frac{4i}{\pi} \cdot \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}$$

Es soll nun Anwendung auf einen speziellen Fall gemacht werden.

Die zu Grunde gelegte Funktion sei

$$t = z^3 - 3z$$

und es soll das von den 4 Hyperbeln

$$x^3 - 3xy^2 - 3x + 2 = 0 \qquad 3x^2 y - y^3 + 3y + 2 = 0$$
$$x^3 - 3xy^2 - 3x - 2 = 0 \qquad 3x^2 y - y^3 - 3y - 2 = 0$$

begrenzte Flächenstück auf den Einheitskreis abgebildet werden.

Das Hyperbelpolygon hat die vier rechtwinkligen Ecken

$$x_1 = +0{,}4684 \qquad y_1 = 0{,}7046$$
$$x_2 = -0{,}4684 \qquad y_2 = 0{,}7046$$
$$x_3 = -0{,}4684 \qquad y_3 = -0{,}7046$$
$$x_4 = +0{,}4684 \qquad y_4 = -0{,}7046$$

Da die Hyperbeln

$$x^3 - 3xy^2 - 3x + 2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^3 - 3xy^2 - 3x - 2 = 0$$

durch die Windungspunkte 1. Ordnung der Funktion t, nämlich $z = \pm 1$ gehen, so treten dort statt gestreckter Winkel solche von 90^0 auf, welche aber unberücksichtigt gelassen werden können. Wollte man sie in Betracht ziehen, so sieht man aus der dann anzuwendenden Formel

$$z^3 - 3z = C \cdot \int_0^Z \prod_{\mu=1}^{\mu=m} (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} (Z - B_\lambda)^{\varepsilon_\lambda \beta_\lambda - 1} \, dZ$$

wo $\beta_\lambda = \frac{1}{2}$ $\varepsilon_\lambda = 2$, also $\varepsilon_\lambda \beta_\lambda - 1 = 0$, dass die betreffenden Glieder sich herausheben.

Dem behandelten Hyperbelpolygon entspricht in der t Ebene ein Quadrat mit den Ecken

$$\begin{aligned} u_1 &= -2 & v_1 &= -2 \\ u_2 &= +2 & v_2 &= -2 \\ u_3 &= +2 & v_3 &= +2 \\ u_4 &= -2 & v_4 &= +2 \end{aligned}$$

Es handelt sich also jetzt nur noch um die Abbildung eines Quadrates auf den Einheitskreis, welche von Herrn H. A. Schwarz l. c. gegeben ist. Die dort gegebenen Tabellen sind im vorliegenden Falle benützt worden.

Den oben genannten 4 Ecken müssen nun im Einheitskreis die Punkte

$$\alpha_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \alpha_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad \alpha_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \qquad \alpha_4 = e^{i\frac{4\pi}{4}}$$

zugeordnet werden.

Man erhält dann

$$Z - A_\mu = i \cdot \frac{1+\zeta}{1-\zeta} - i \cdot \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{4}(2\mu-1)}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}(2\mu-1)}} \qquad \mu = 1, 2, 3, 4$$

und durch Einsetzen in Formel

$$z^3 - 3z = C \cdot \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{1+\zeta^4}} + C'$$

Die Substitution

$$\zeta' = \sqrt{i} \cdot \zeta = e^{-\frac{i\pi}{4}} \cdot \zeta$$

welche eine Drehung des Einkeitskreises um -45^0 bedingt, gibt dann

$$z^3 - 3z = C \cdot \int_0^{\zeta'} \frac{d\zeta'}{\sqrt{1-\zeta'^4}} + C'$$

Die beiden Constanten C und C' bestimmen Lage und absolute Grösse der abzubildenden Figur. Es werde gesetzt

$$C' = 0 \qquad C = e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{K} \qquad \text{wo } K = 1{,}311$$

Man erhält

$$z^3 - 3z = e^{-\frac{3i\pi}{4}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{K} \cdot \int_0^{\zeta'} \frac{d\zeta'}{\sqrt{1-\zeta'^4}}$$

$$\zeta' = \operatorname{sn} e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot \frac{K}{2\sqrt{2}} (z^3 - 3z)$$

$$\zeta = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \operatorname{sn} e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot \frac{K}{2\sqrt{2}} (z^3 - 3z)$$

Zusammengehörige Werte sind dann

Einheitskreis		Quadrat der t Ebene		Polygon der z Ebene	
ξ	η	u	v	x	y
0,7071	0,7071	— 2	— 2	0,4684	0,7046
0,6824	0,7310	— $\frac{8}{5}$	— 2	0,3825	0,6657
0,6038	0,7971	— $\frac{6}{5}$	— 2	0,2909	0,6350
0,4617	0,8871	— $\frac{4}{5}$	— 2	0,1956	0,6132
0,2536	0,9673	— $\frac{2}{5}$	— 2	0,0982	0,6003
0	1	0	— 2	0	0,5961
0,7310	0,6824	— 2	— 1,6	0,5151	0,6186
0,6601	0,6601	— 1,8	— 1,6	0,4205	0,5721
0,5493	0,6770	— 1,2	— 1,6	0,3190	0,5365
0,3982	0,7142	— 0,8	— 1,6	0,2139	0,5120
0,2105	0,7507	— 0,4	— 1,6	0,1072	0,4979
0	0,7647	0	— 1,6	0	0,4933
0,7971	0,6038	— 2	1,2	0,5722	0,5266
0,6770	0,5493	— 1,8	1,2	0,4654	0,4672
0,5481	0,5481	— 1,2	1,2	0,3506	0,4266
0,3733	0,5433	— 0,8	1,2	0,2335	0,4004
0,1881	0,5602	— 0,4	1,2	0,1165	0,3861
0	0,5616	0	1,2	0	0,3815
0,8871	0,4617	— 2	0,8	0,6447	0,4155
0,7142	0,3982	— 1,6	0,8	0,5178	0,3456
0,5433	0,3733	— 1,2	0,8	0,3839	0,3020
0,3681	0,3681	— 0,8	0,8	0,2526	0,2773
0,1863	0,3700	— 0,4	0,8	0,1252	0,2646
0	0,3715	0	0,8	0	0,2608

Einheitskreis		Quadrat der t Ebene		Polygon der z Ebene	
ξ	η	u	v	x	y
0,9673	0,2536	— 2	0,4	0,7450	0,2827
0,7501	0,2105	— 1,6	0,4	0,5747	0,1954
0,5602	0,1881	— 1,2	0,4	0,4131	0,1592
0,3700	0,1863	— 0,8	0,4	0,2678	0,1426
0,1853	0,1853	— 0,4	0,4	0,1317	0,1348
0	0,1854	0	0,4	0	0,1325
1	0	— 2	0	1	0
0,7647	0	— 1,6	0	0,6084	0
0,5616	0	— 1,2	0	0,4257	0
0,3715	0	— 0,8	0	0,2735	0
0,1854	0	— 0,4	0	0,1341	0
0	0	0	0	0	0

Nach dieser Tabelle wurde die beigegebene Fig. 5 ausgeführt.

VITA.

Ich wurde am 17. März 1874 zu Kitzingen in Unterfranken geboren. In den Jahren 1885—1894 besuchte ich die humanistischen Gymnasien zu Würzburg und Burghausen a. d. Salzach, an welch letzterem ich absolvierte. Hierauf widmete ich mich an der kgl. Universität zu München dem Studium der Mathematik, der theoretischen und praktischen Physik, sowie der Astronomie.

Meinen Lehrern an der Universität München, insbesondere Herrn Dr. Ferdinand Lindemann, möchte ich an dieser Stelle für die liebevolle Förderung meiner Studien den herzlichsten Dank aussprechen.

Im Jahre 1898 unterzog ich mich der Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik und werde seither als Assistent an der kgl. technischen Hochschule zu München verwendet.

Ludwig Marc.

Fig. 1.

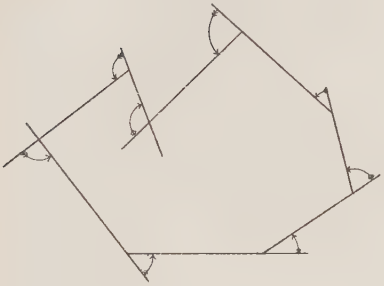


Fig. 2.

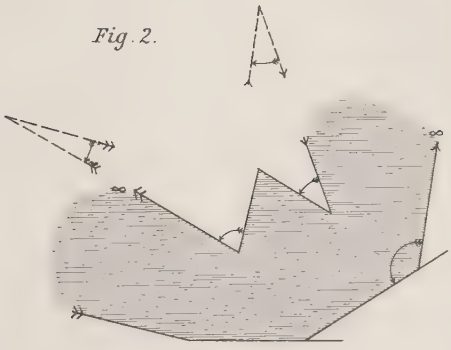


Fig. 3a.

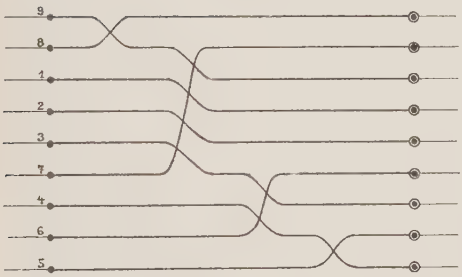


Fig. 4a.

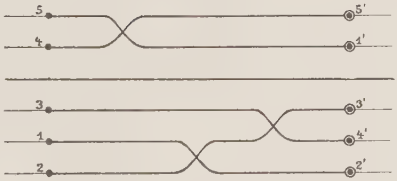


Fig. 4b.

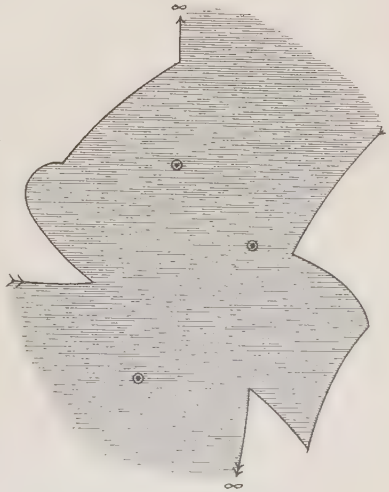
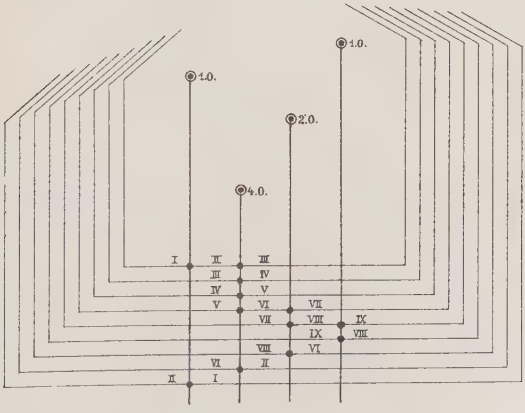


Fig. 3b.



L. Marc, Conforme Abbildung.

Lith. Anst. v. Hub. Köhler, München.

Fig. 5a.

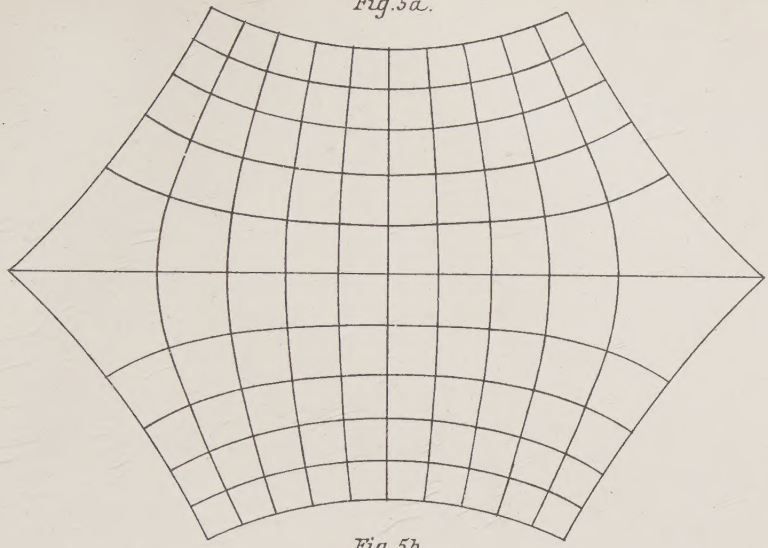
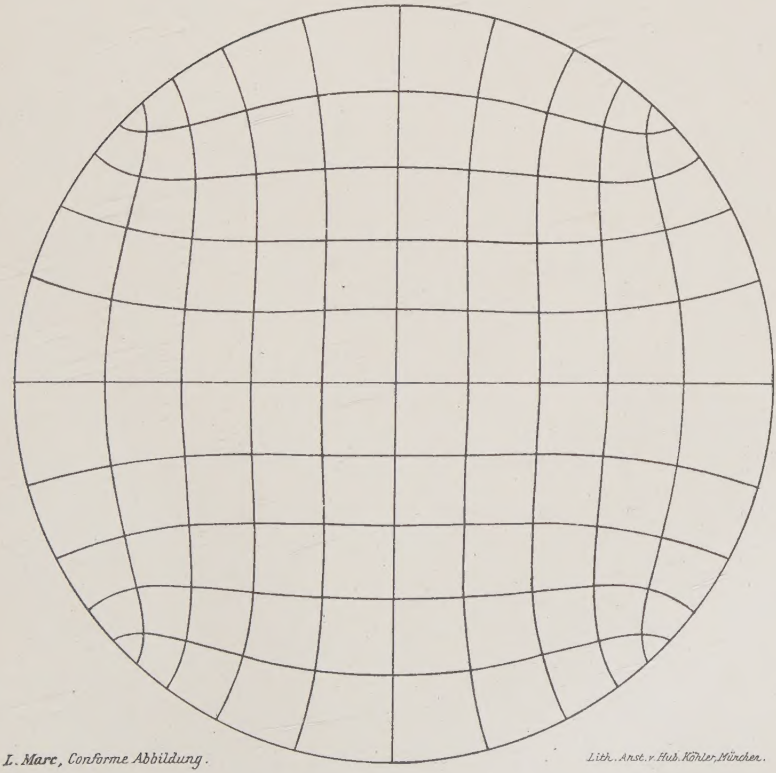


Fig. 5b.



L. Marc, Conforme Abbildung.

Lith. Anst. v. Hub. Köhler, München.